



**Exercice 1 (3 pts)**

Les débits en m<sup>3</sup>/s déterminés au niveau d'une station hydrométrique sont dans le tableau suivant :

| Heure (h)                 | 09h30 | 10h00 | 10h30 | 11h00 | 11h30 | 12h00 | 12h30 | 13h00 | 13h30 | 14h00 | 14h30 | 15h00 | 15h30 | 16h00 |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Débit (m <sup>3</sup> /s) | 0.17  | 0.17  | 0.51  | 0.85  | 1.36  | 1.87  | 2.04  | 1.44  | 1.02  | 0.68  | 0.44  | 0.20  | 0.18  | 0.18  |

L'épisode pluvial qui les a engendrés (en intensité, mm/h) :

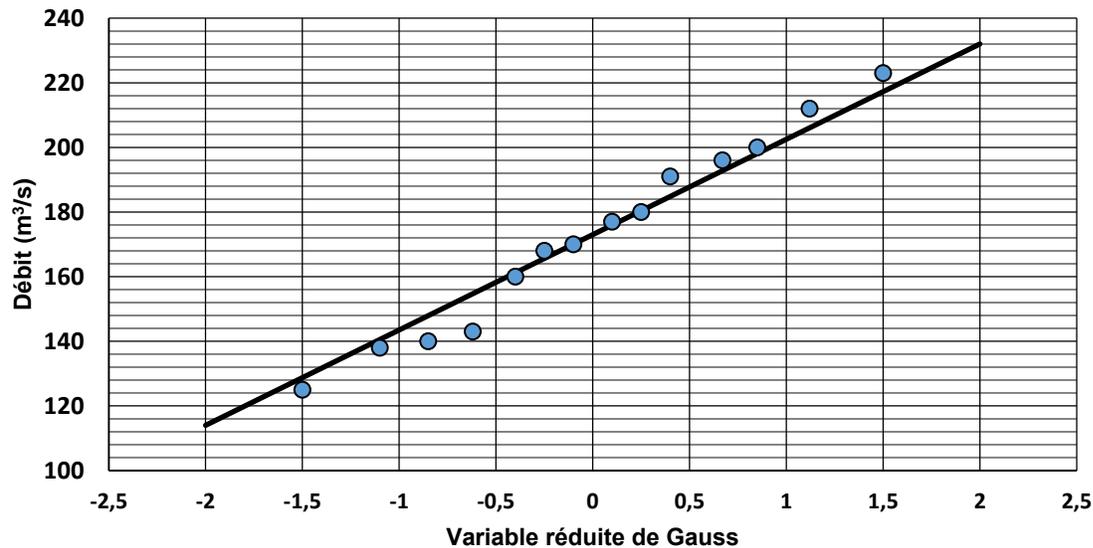
| Durée (h)        | 09h30-10h00 | 10h00-10h30 | 10h30-11h00 | 11h00-11h30 |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Intensité (mm/h) | 2           | 7           | 13          | 2           |

2- Quelle est la surface du bassin, si la lame ruisselée est de **6 mm**.

3- Quel est le coefficient de ruissellement.

**Exercice 2 (4 pts)**

L'ajustement des débits d'un cours d'eau à la loi Normale est présenté dans la figure ci-dessous.



- 1) Calculer le débit de période de retour à 50 et 100 ans.
- 2) Préciser l'intervalle de confiance à 95% sur la moyenne et l'écart type ( $t_{1-\frac{1-\alpha}{2}} = 1.96$ )



**Exercice 3 (6 pts)**

L'ajustement de deux lois (loi 1 et loi 2) a été effectué sur une série de pluies annuelles, ensuite l'ajustement a été vérifié par le test de khi-deux à 99 % :

1. Rappeler le but de ce test
2. Que peut-on conclure dans les trois cas suivants ?

|       | Cas a                    | Cas b                    | Cas c                    |
|-------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Loi 1 | $\chi^2_{Calculé}=14.33$ | $\chi^2_{Calculé}=16.13$ | $\chi^2_{Calculé}=14.37$ |
| Loi 2 | $\chi^2_{Calculé}=12.56$ | $\chi^2_{Calculé}=15.51$ | $\chi^2_{Calculé}=14.18$ |

**Données :**

Le nombre de classes choisi =8

Loi 1 caractérisée par deux paramètres.

Loi2 caractérisé par trois paramètres.

**Exercice 4 (7 pts)**

On dispose des observations des débits moyens annuels d'une station hydrométrique (tableau suivant).

| Années                     | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969  | 1970 | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 | 1978 |
|----------------------------|------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Débits (m <sup>3</sup> /s) | 46.1 | 67.4 | 77.6 | 82.6 | 57   | 112.4 | 38.3 | 36.4 | 56.2 | 47   | 56.5 | 42.1 | 84   | 94   | 128  |

1. Ajuster par les moments les trois paramètres a, b et X<sub>0</sub> (loi de Galton)
2. Quelle est la crue de fréquence 0.9 ?
3. Quelle est la fréquence et la période de retour de la crue de l'année 1978

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{v^2}{2}} \cdot dv \quad \text{et} \quad U = a \log (x_i - x_0) + b$$



Concours de doctorat 3<sup>ème</sup> cycle en Hydraulique année 2022-2023  
**Matière 2 : Hydrologie durée : 02h :00**  
**CORRECTION TYPE**

**Solution exercice 1 (3 pts)**

1. Quelle est la surface du bassin, si la lame ruisselée est de 6 mm

Calcul du volume ruisselé

$$Vr = (\text{la somme des débit} * \text{intervalle de temps en seconde})$$

$$Vr = (0.17 + 0.17 + 0.51 + 0.85 + 1.36 + 1.87 + 2.04 + 1.44 + 1.02 + 0.68 + 0.44 + 0.2 + 0.18 + 0.18) * (0.5 \times 3600)$$

$$Vr = 11.11 \times 1800 = 19998 \text{ m}^3 \quad (1 \text{ pt})$$

La surface du bassin :

$$Sbv = Vr/Lr = 19998/0.006$$

$$Sbv = 3.33 \text{ km}^2 \quad (1 \text{ pt})$$

2. Quel est le coefficient de de ruissellement

$$Cr = Lr/P$$

$$P = (2 + 7 + 13 + 2) \times 0.5 = 12 \text{ mm} \quad (0.5 \text{ pts})$$

$$Cr = 6/12 \quad (0.5 \text{ pt})$$

**Solution exercice 2 (4 pts)**

- 1) Calculer le débit de période de retour à 50 et 100 ans.

A partir de la courbe d'ajustement et de la droite d'Henri  $Q = z\sigma + \mu$

Pour  $z = -2$  nous avons  $Q=114 \text{ m}^3/\text{s}$  et pour  $z = 2$  nous avons  $Q=232 \text{ m}^3/\text{s}$   
Nous aurons  $\mu=173 \text{ m}^3/\text{s}$  et  $\sigma = 29.5 \text{ m}^3/\text{s}$  **(0.5 + 0.5 pts)**

Pour la période de retour à 50 ans :  $F(Z) = 1-(1/T) = 1-1/50 = 0.98$

Pour la période de retour à 100 ans :  $F(Z) = 1-(1/T) = 1-1/100 = 0.99$

D'après la table de Gauss :

T=50 ans, nous aurons  $Z=2.06$  **(0.5 pts)**

T=100 ans, nous aurons  $Z=2.33$  **(0.5 pts)**

T=50 ans :  $Q = z\sigma + \mu = 2.06 \times 29.5 + 173 = 233.77 \text{ m}^3/\text{s}$  **(0.5 pts)**

T=100 ans :  $Q = z\sigma + \mu = 2.33 \times 29.5 + 173 = 241.74 \text{ m}^3/\text{s}$  **(0.5 pts)**



Concours de doctorat 3<sup>ème</sup> cycle en Hydraulique année 2022-2023

**Matière 2 : Hydrologie** durée : 02h :00

**CORRECTION TYPE**

2) Préciser l'intervalle de confiance à 95% sur la moyenne et l'écart type.

Pour la moyenne, on utilise les bornes de l'intervalle :

$$\mu \pm t_{1-\frac{1-\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 173 \pm 1.96 \frac{29.5}{\sqrt{14}}$$

$$157.55 < \mu < 188.45 \text{ (0.25 + 0.25 pts)}$$

$$\sigma \pm t_{1-\frac{1-\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 29.5 \pm 1.96 \frac{29.5}{\sqrt{14}}$$

$$14.05 < \sigma < 44.95 \text{ (0.25 + 0.25 pts)}$$

**Solution exercice 3 (6 pts)**

1. Rappeler le principe

Le test de khi-deux est un test d'adéquation qui permet de conclure si la série étudiée provient d'une loi de probabilité donnée. **(1 pt)**

2. Que peut-on conclure dans les trois cas suivants :

Nombre de degré de liberté  $\gamma = k - r - 1$  avec k: nombre de classes; r nombre de paramètres définissant la loi

La loi 1:  $\gamma = 8 - 2 - 1 = 5$  **(0.5 pts)**; la table de Khi-deux donne,  $X^2 = 15.1$  **(0.5 pts)**

La loi 2:  $\gamma = 8 - 3 - 1 = 4$  **(0.5 pts)**; la table de Khi-deux donne,  $X^2 = 13.3$  **(0.5 pts)**

- Cas (a) : les deux lois s'ajustent. **(0.5 + 0.5 pts)**
- Cas (b) : les deux lois ne s'ajustent pas. **(0.5 + 0.5 pts)**
- Cas (c) : la loi 1 s'ajuste et la loi 2 ne s'ajuste pas. **(0.5 + 0.5 pts)**



Concours de doctorat 3<sup>ème</sup> cycle en Hydraulique année 2022-2023  
**Matière 2 : Hydrologie** durée : 02h :00  
**CORRECTION TYPE**

**Solution exercice 4 (7 pts)**

1. Ajuster par les moments les trois paramètres a, b et X<sub>0</sub>

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} \quad (0.25 \text{ pts})$$

$$\bar{X} = 68,37 \text{ m}^3/\text{s} \quad (0.25 \text{ pts})$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{N-1}} \quad (0.25 \text{ pts})$$

$$\sigma_x = 27,60 \text{ m}^3/\text{s} \quad (0.25 \text{ points})$$

L'ajustement des paramètres a, b et X<sub>0</sub>

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du \quad \text{et} \quad U = a \log (x_i - x_0) + b$$

On utilise la première formulation (formulation proche de Gauss).

$$\frac{\sigma_x^4}{u_3} = \frac{(\bar{X} - X_0)^3}{\sigma_x^2 + 3(\bar{X} - X_0)^2} \quad (0.5 \text{ pts})$$

On met :  $X = \bar{X} - X_0$ , cette expression peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\sigma_x^4}{u_3} = \frac{X^3}{\sigma_x^2 + 3X^2}$$

$$\text{Donc } u_3 X^3 = \sigma_x^4 (\sigma_x^2 + 3X^2)$$

On divise les deux parties sur X<sup>2</sup>

$$\text{On obtient : } X = \frac{\sigma_x^4 (\sigma_x^2 + 3X^2)}{u_3 X^2} \quad (\text{Equation sous la forme } X = F(X)) \quad \dots (0,25 \text{ points})$$

Sachant que U<sub>3</sub> est le moment centré d'ordre 3

$$u_3 = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum (x_i - \bar{x})^3 \quad (0,5 \text{ points})$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^3 = 217964,97$$

$$u_3 = 17474.88 \quad (0,25 \text{ points})$$

On doit vérifier la relation  $X = F(X)$ . Pour trouver la solution on prend une valeur X' qui permet d'évaluer  $X'' = F(X')$  et on recommence par  $X''' = F(X'')$  jusqu'à obtenir l'égalité

$$X^n = F(X^n)$$

Dans le cas numérique on peut très bien partir de X<sub>0</sub> = 0, donc (X =  $\bar{X}$ )



Concours de doctorat 3<sup>ème</sup> cycle en Hydraulique année 2022-2023

**Matière 2 : Hydrologie durée : 02h :00**

**CORRECTION TYPE**

$$x = \frac{(27,60)^4 ((27,60)^2 + (68,37)^2)}{17474,88 (68,37)^2} = 105,18$$

On remarque que :

$$68,37 \neq 105,18$$

Donc on recalcul par la valeur obtenue jusqu'à l'égalité des deux parties

| X      | F(X)   |
|--------|--------|
| 68,37  | 105,18 |
| 105,18 | 101,90 |
| 101,90 | 102,05 |
| 102,05 | 102,04 |
| 102,04 | 102,04 |

(0,75 points)

La convergence est très rapide, on a une stabilisation vers la 5<sup>ème</sup> itération (**X = 102,04**).

$$X = \bar{x} - X_0 \rightarrow X_0 = \bar{x} - X$$

$$X_0 = 68,37 - 102,04$$

$$X_0 = -33,67 \quad (0,5 \text{ points})$$

Connaître  $X_0$ , nous pouvons le calculer immédiatement a et b.

$$a = \frac{1,517}{\sqrt{\log \left[ 1 + \frac{\sigma_x^2}{(\bar{x} - x_0)^2} \right]}} \quad (0,25 \text{ points})$$

$$a = 8,66 \quad (0,25 \text{ points})$$

$$b = \frac{1,1513}{a} - a \log (\bar{x} - X_0) \quad (0,25 \text{ points})$$

$$b = -17,26 \quad (0,25 \text{ points})$$

2. Quelle est la crue de fréquence 0.9 ?

$$F = 0,9 \rightarrow U = 1,28 \text{ (Tableau)} \quad (0,25 \text{ points})$$

$$U = a \log (x_i - x_0) + b \quad (0,25 \text{ points})$$

$$1,28 = 8,66 \log (X_i - (-33,67)) - 17,26$$

$$\text{Log} (X_i + 33,67) = \frac{1,28 + 17,26}{8,66}$$

Donc :

$$10 \text{ Log} (X_i + 33,67) = 10 (1,29 + 17,26) / 8,66$$



Concours de doctorat 3<sup>ème</sup> cycle en Hydraulique année 2022-2023

**Matière 2 : Hydrologie durée : 02h :00**

**CORRECTION TYPE**

$$X_i + 33,67 = 10^{(1,29 + 17,26) / 8,66}$$

$$X_i = 10^{(1,29 + 17,26) / 8,66} - 33,67$$

$$\mathbf{X_i = 105,01 \text{ m}^3/\text{s} \quad (0,5 \text{ points})}$$

3. Quelle est la fréquence et la période de retour de la crue de l'année 1978

- La fréquence

La crue de l'année 1978 a atteint un débit  $Q = 128 \text{ m}^3/\text{s}$ , donc :

$$\mathbf{U = a \log (x_i - x_0) + b \quad (0,25 \text{ points})}$$

$$U = 8,66 \log (128 - (-33,67)) - 17,26$$

$$U = 1,86 \quad (0,25 \text{ points})$$

$$F = 0,9686 \text{ (Tableau)} \quad (0,25 \text{ points})$$

- La période de retour :

$$\mathbf{T = \frac{1}{1-FND} = \frac{1}{1-0,9686} \quad (0,25 \text{ points})}$$

$$T = 31.85 \text{ ans} \approx 32 \text{ ans} \quad (0,25 \text{ points})$$